

Calcul du rayon du cercle servant à fabriquer une vis d'Archimède

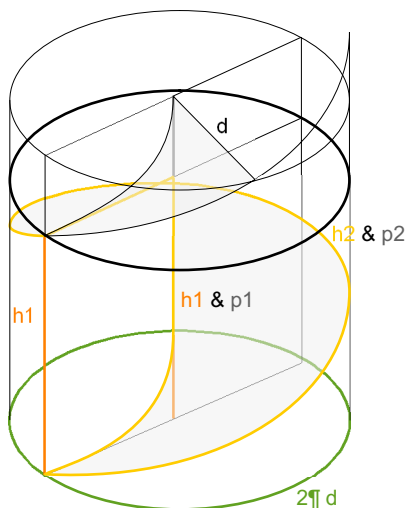


Fig.1

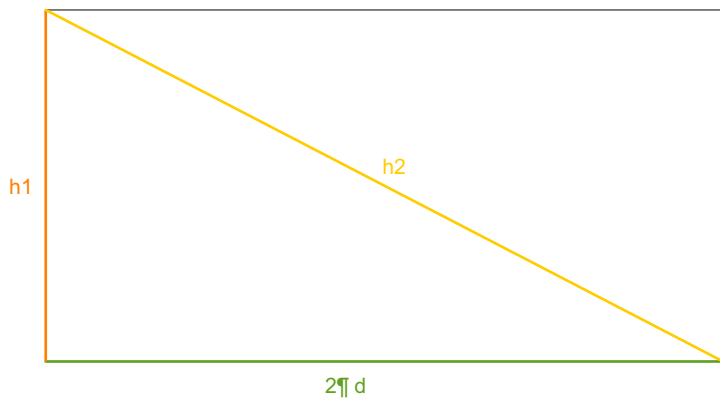


Fig.2

Enoncé

Nous disposons d'un cylindre de rayon d et d'une hauteur $h1$.

Autour de ce cylindre, nous devons construire une surface hélicoïdale de telle façon que sa limite interne épouse la surface externe de ce cylindre et qu'un tour complet de 360° de cette surface se développe sur la hauteur $h1$, qui représente le pas de vis de la vis d'Archimède ainsi obtenue.

La base de la spirale recherchée est en fait un segment d'anneau dont le segment de périmètre de son cercle interne est la limite interne de la spirale qui doit épouser la surface du cylindre.

Nous devons rechercher le rayon de ce cercle interne en fonction des dimensions du cylindre, d et $h1$.

Première relation

Le développé du cylindre est représenté par la figure 2. Nous y voyons tout de suite la forme d'un triangle rectangle. Et de là, Pythagore nous enseigne que :

$$I. (h2)^2 = (2\pi d)^2 + (h1)^2$$

Gymnastique 3D

C'est ici que les choses se corsent.

Dans un premier temps, pour mieux ressentir le problème intuitivement, imaginons qu'on découpe un anneau limité par les périmètres $p1$ et $p2$, dans une matière infiniment souple et élastique. Prenons du caoutchouc.

Ouvrons cette anneau en le coupant selon la droite d (fig.3).

Comme cette matière est complètement élastique, nous pouvons étirer le périmètre $p1$, une extrémité vers le haut, l'autre vers le bas de telle sorte que ce qui était un cercle au départ, devienne une droite, un axe, comme montré sur la figure 1.

Qu'advient-il de l'autre périmètre $p2$?

Chacun de ses points doivent rester en regard de $p1$ sur toute la longueur $p1$. Or, $p2$ est plus long que $p1$, mais il s'étire sur la même longueur $p1$. Comment ? ... En s'enroulant autour de l'axe $p1$ tout comme sur la figure 1.

Calculons maintenant de combien $p2$ est plus long que $p1$:

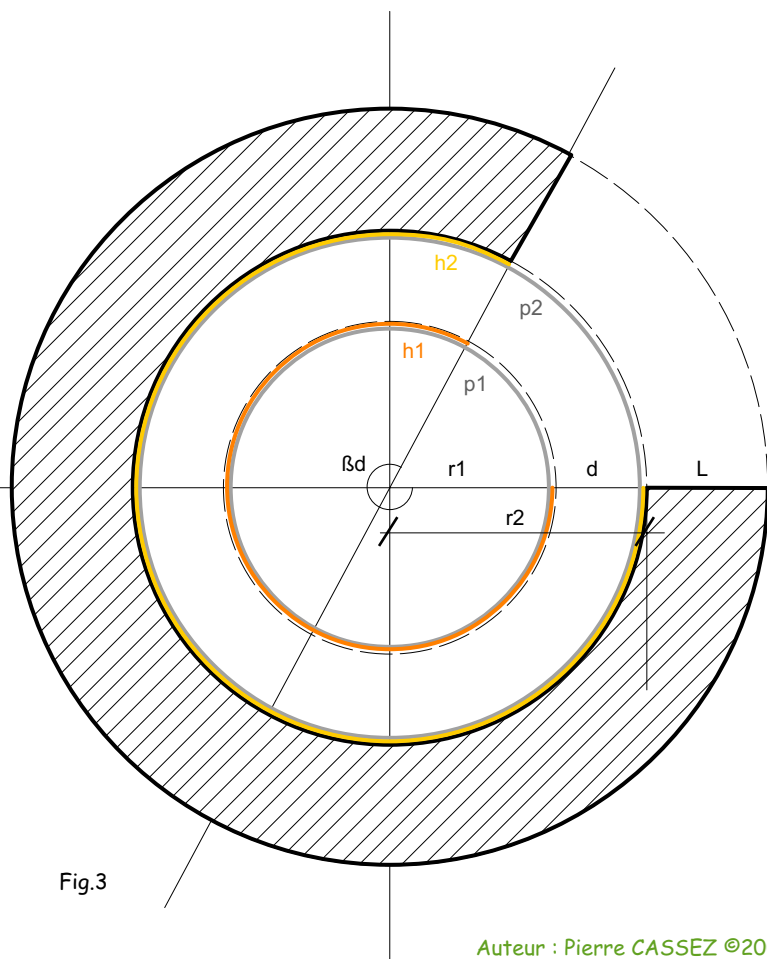


Fig.3

Calcul du rayon du cercle servant à fabriquer une vis d'Archimède

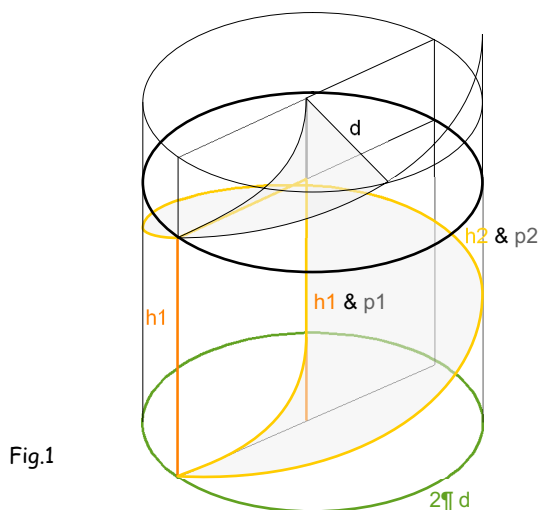


Fig.1

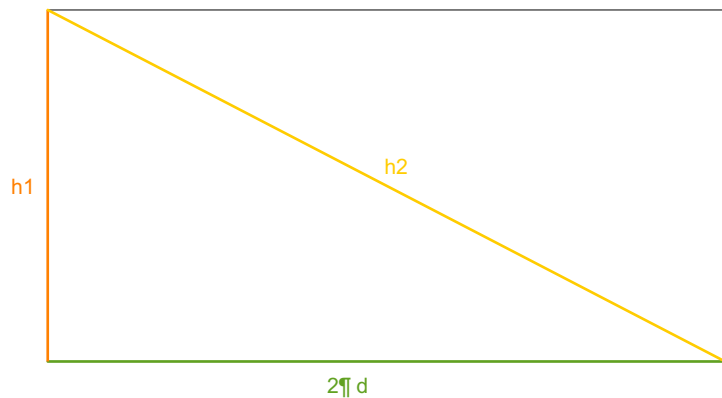


Fig.2

$$\text{I. } (h_2)^2 = (2\pi d)^2 + (h_1)^2$$

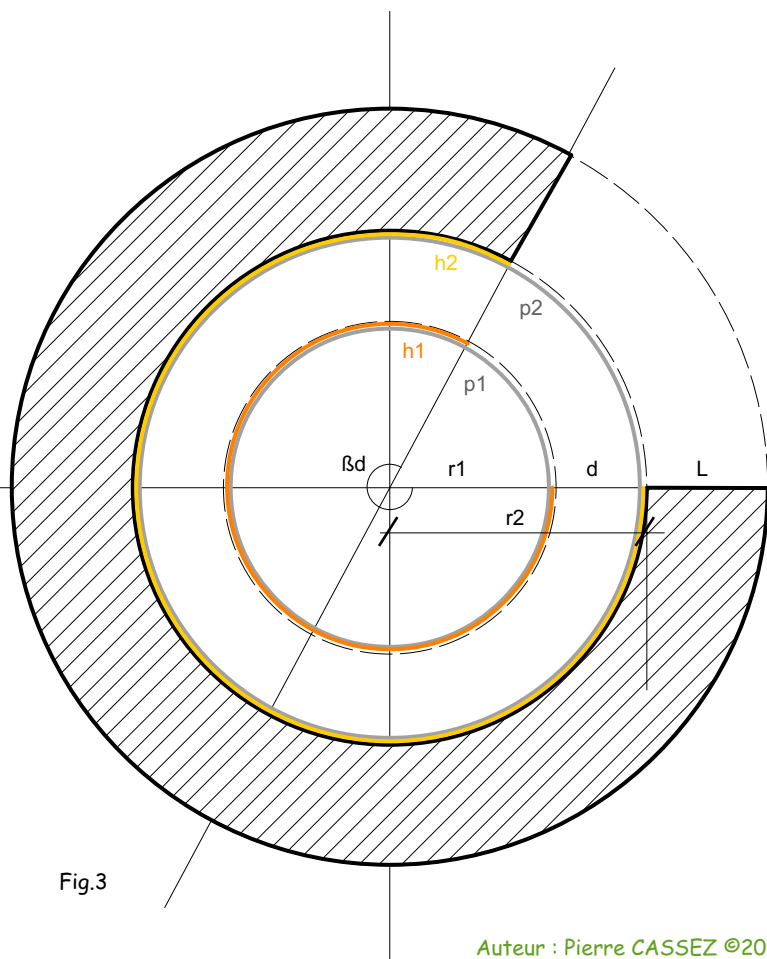


Fig.3

$$\begin{cases} p_1 = 2\pi r_1 \\ p_2 = 2\pi r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p_1}{r_1} = 2\pi \\ \frac{p_2}{r_2} = 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{p_2}{r_2} = \frac{p_1}{r_1} \quad \text{ou bien} \quad p_2 r_1 = p_1 r_2$$

$$p_2 = \frac{p_1 r_2}{r_1}$$

Par homothétie de centre c, nous pouvons conclure de suite que les segments de périmètre h1 et h2 sont liés de la même façon :

$$h_2 = \frac{h_1 r_2}{r_1} \quad (\text{avec } r_2 = r_1 + d)$$

$$\text{II. } h_2 = \frac{h_1 (r_1 + d)}{r_1}$$

Calcul du rayon du cercle servant à fabriquer une vis d'Archimède

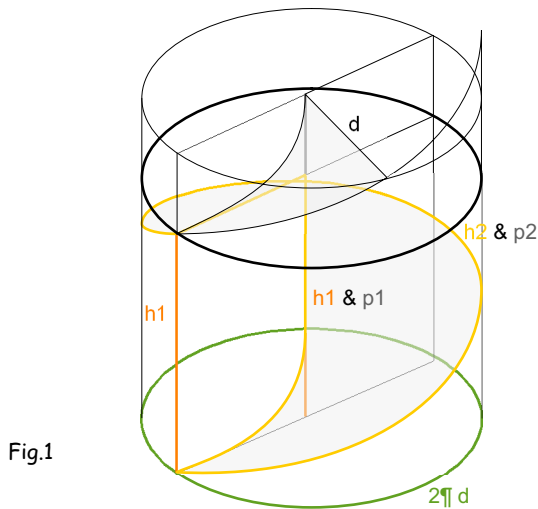


Fig.1

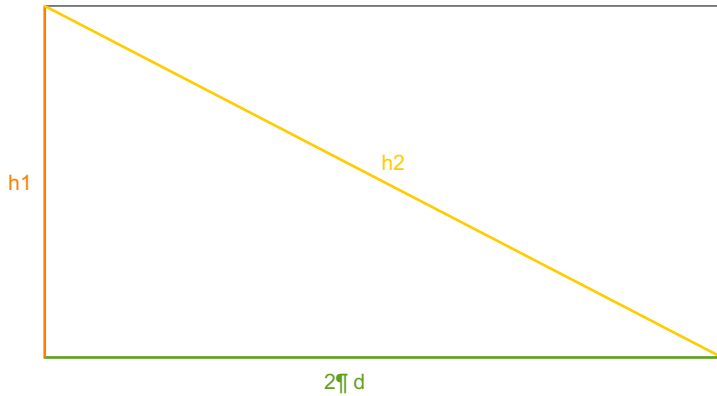


Fig.2

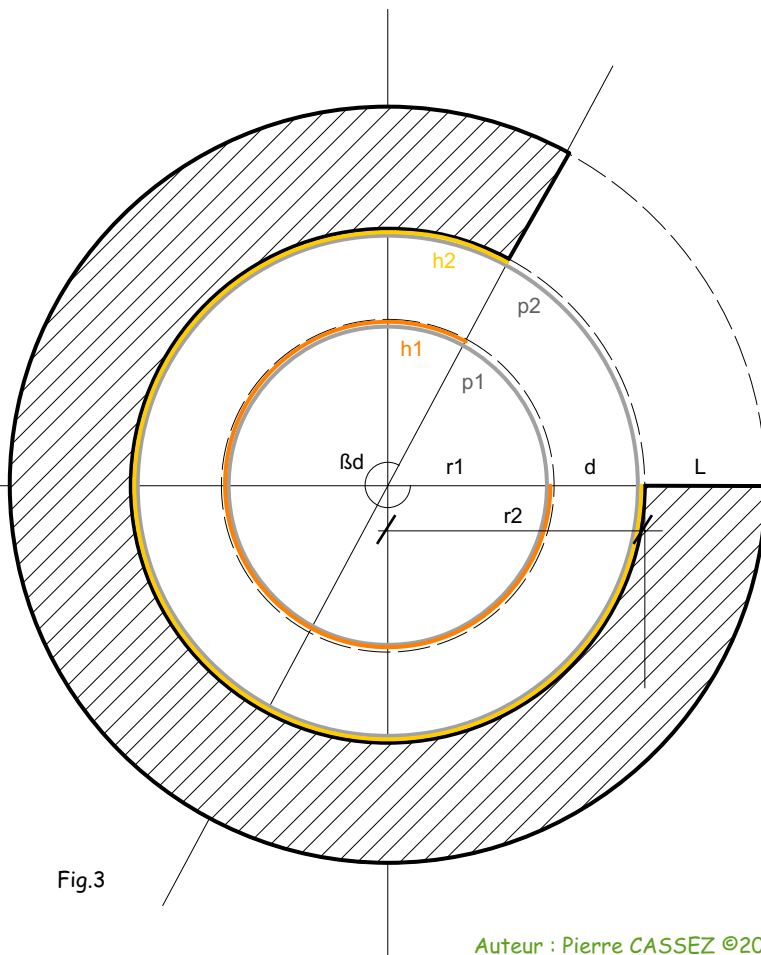


Fig.3

$$\begin{cases} \text{I. } (h2)^2 = (2\pi d)^2 + (h1)^2 \\ \text{II. } h2 = \frac{h1 (r1 + d)}{r1} \end{cases}$$

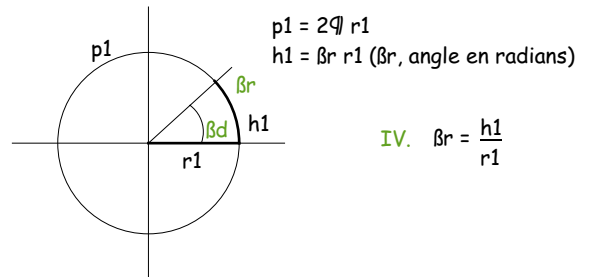
De ces deux relations, nous pouvons remplacer $h2$ de la première, par $h2$ de la seconde.

Nous cherchons à exprimer le rayon $r1$.

En résolvant l'équation, on exprime $r1$ comme répondant à la relation suivante :

$$\text{III. } r1 = \frac{h1 d}{\sqrt{(h1)^2 + (2\pi d)^2} - h1}$$

$h1$ = le pas
 d = le rayon du cylindre interne.



$$\text{IV. } \beta r = \frac{h1}{r1}$$

Règle de trois pour la conversion des angles

$$\beta d = 360^\circ \text{ --- } \beta r = 2\pi$$

$$\beta d = 1^\circ \text{ --- } \beta r = \frac{2\pi}{360}$$

$$\beta d = x^\circ \text{ --- } \beta r = \frac{2\pi}{360} \cdot x^\circ$$

plus généralement :

$$\beta r = \frac{2\pi}{360} \cdot \beta d$$

et donc :

$$\frac{2\pi}{360} \cdot \beta d = \frac{h1}{r1}$$

V.

$$\beta d = \frac{360}{2\pi} \left(\frac{h1}{r1} \right)$$

$h1$ = le pas
 $r1$ = le rayon trouvé par III.

Conclusion

A l'aide de la relation III., nous pouvons trouver le rayon $r1$ qui donnera $r2 = r1 + d$.

Il suffira d'ajouter la largeur L de la spirale souhaitée.

La relation V. permet de calculer l'angle βd en degrés.